Seat No. : 708

DD-107

December-2018

B.Sc., Sem.-I

101 : Mathematics
(Calculus & Matrix Algebra)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ ચાર પ્રશ્નો છે.
(2) જમણી બાજુના અંક જે-તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

1. (A) (1) જો $y = e^{ax}\sin(bx + c)$; $a \neq 0, b \neq 0$, c – અચળ સંખ્યા હોય તો સાબિત કરો કે **7**
$y_n = r^n e^{ax}\sin(bx + c + n\phi)$ જ્યાં $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$.

(2) જો $y = \sin(m\cos^{-1}x)$; $x \in]-1, 1[$ હોય તો સાબિત કરો કે **7**
$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$

અથવા

(1) અનંત વાસ્તવિક ધનપદોવાળી શ્રેઢી માટે દ' એલમ્બર્ટની ગુણોત્તર કસોટી લખો અને સાબિત કરો. **7**

(2) શ્રેઢીની અભિસારીતા ચર્ચો : **7**
(i) $\Sigma(-1)^n[\sqrt{n} - \sqrt{n-1}]$
(ii) $\Sigma\frac{x^n}{n^2 + 1}$

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે ચાર) **4**
(1) જો $y = (2x + 3)^4$ હોય તો $y_5(1)$ શોધો.
(2) જો $y = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$ હોય તો y_n શોધો.
(3) લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો.
(4) એકાન્તર શ્રેઢી અભિસારી ક્યારે કહેવાય ?
(5) pની કઈ કિંમત માટે શ્રેઢી $\Sigma\frac{1}{n^p}$ ની અભિસારી થાય ?
(6) ઘાત શ્રેઢી $\Sigma\frac{x^n}{n!}$ ની અભિસાર ત્રિજ્યા મેળવો.

@geniusguruji

2. (A) (1) કોશીનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(2) $x > 0$ માટે સાબિત કરો કે $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$ આ પરથી બતાવો કે π ની કિંમત $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ અને $3\sqrt{3}$ ની વચ્ચે આવેલી છે. 7

અથવા

(1) મેક્લોરીનનું પ્રમેય લખો અને $f(x) = \cos x$; $x \in R$ નું xના ઘાતમાં વિસ્તરણ મેળવો. 7

(2) લક્ષ મેળવો : 7

(i) $\lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{\log x} - \frac{x}{x-1}\right], x \in R^+ - \{1\}$

(ii) $\lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{\cot^2 x}$

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે ચાર) 4

(1) અનિશ્ચિત સ્વરૂપ એટલે શું ?

(2) લક્ષ મેળવો : $\lim_{x \to 0} \frac{9^x - 4^x}{x}$.

(3) લાન્ગ્રાજનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો.

(4) બતાવો કે $f(x) = x^5 + 1, x \in R$ માટે વધતું વિધેય છે.

(5) વિધેય $(1 + x)^m$ નું વિસ્તરણ xના પદમાં લખો.

(6) વિધેય $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ માટે રોલનું મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રયોજી શકાય કે કેમ ?

3. (A) (1) વ્યાખ્યા આપો : શ્રેણિકોનો ગુણાકાર. જો A એ $m \times n$ કક્ષાનો અને B એ $n \times p$ કક્ષાનો શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $(AB)^T = B^T A^T$. 7

(2) (i) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શોધો. 7

(ii) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & i & 4-2i \end{bmatrix}$ માટે ચકાસો કે $A^* = \overline{(A^T)}$

અથવા

@geniusguruji

(1) વ્યાખ્યા આપો : સહઅવયવજ શ્રેણિક, જો A એ n-કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A|\, I_n$. 7

(2) (i) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1} મેળવો. 7

(ii) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ ને સંમિત અને વિ-સંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો.

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે ત્રણ) 3

(1) નિમ્ન ત્રિકોણીય શ્રેણિકની વ્યાખ્યા ઉદાહરણ સહિત આપો.

(2) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ વિ-સંમિત શ્રેણિક હોય તો x નું મૂલ્ય મેળવો.

(3) ચોરસ શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે તે માટેની શરત જણાવો.

(4) જો A સંમિત શ્રેણિક હોય તો $A + A^T$ સંમિત કે વિ-સંમિત શ્રેણિક છે ?

(5) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1} મેળવો.

4. (A) (1) જો λ ($\lambda \neq 0$) એ વ્યસ્ત સંપન્ન શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_n$ નું લાક્ષણિક મુલ્ય હોય તો બતાવો કે 7

(i) $\frac{1}{\lambda}$ એ A^{-1} નું લાક્ષણિક મુલ્ય છે.

(ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ એ adjA નું લાક્ષણિક મુલ્ય છે.

(2) (i) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો મેળવો તથા કોઈપણ એક લાક્ષણિક મૂલ્યને અનુરૂપ લાક્ષણિક સદીશ શોધો. 7

(ii) નીચે આપેલ સમીકરણ સંહતિની સુસંગતા ચકાસો.

$x + 2y + z = 2,\ 2x + 4y + 3z = 3,\ 3x + 6y + 5z = 4.$

અથવા

@geniusguruji

(1) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો તથા શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ માટે કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય ચકાસો. **7**

(2) (i) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ માટે શ્રેણિક બહુપદી,

$A^6 - 3A^5 + 2A^4 - 2A^3 + 5A^2 - 3A + I$ વડે નિરૂપણ પામતો શ્રેણિક શોધો. **7**

(ii) આપેલ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ ક્રેમરની રીતે મેળવો.

$x + y + z = 6,\ 2x - y + z = 3,\ x + 3y - z = 4$

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે ત્રણ) **3**

(1) ચોરસ શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક સમીકરણ લખો.

(2) કોઈપણ વિકર્ણી શ્રેણિકના લાક્ષણિક મુલ્યો લખો.

(3) જો ચોરસ શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક મૂલ્ય '–2' હોય તો A^2 અને A^3 ના લાક્ષણિક મૂલ્ય કયા હશે ?

(4) સુરેખ સમીકરણ સંહતિ માટે અનંત ઉકેલ ક્યારે મળે ?

(5) વ્યાખ્યા આપો : સુસંગત સંહતિ.

@geniusguruji

Seat No. : ____________

DD-107

December-2018

B.Sc., Sem.-I

101 : Mathematics
(Calculus & Matrix Algebra)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) There are **four** questions.
(2) Figure to the right indicate full marks of the question/sub question.

1\. (A) (1) If $y = e^{ax}\sin(bx + c)$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, c – constants then prove that $y_n = r^n e^{ax}\sin(bx + c + n\phi)$ where $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$. **7**

(2) If $y = \sin(m\cos^{-1}x)$; $x \in \,]-1, 1[$ then prove that $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$ **7**

OR

(1) State and prove De'Alembert ratio test for the infinite positive series. **7**

(2) Discuss the convergence of the following series : **7**

(i) $\Sigma(-1)^n\left[\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right]$

(ii) $\Sigma\dfrac{x^n}{n^2 + 1}$

(B) Give answer in short : (Any **four**) **4**

(1) If $y = (2x + 3)^4$ then find $y_5(1)$.

(2) If $y = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$ then find y_n.

(3) State Leibnitz's theorem.

(4) When alternative series is convergent ?

(5) For which value of p, $\Sigma\dfrac{1}{n^p}$ is convergent ?

(6) Find the radius of convergence of the power series $\Sigma\dfrac{x^n}{n!}$.

@geniusguruji

2. (A) (1) State and prove Cauchy's mean value theorem. 7

(2) $x > 0$ prove that $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$ and hence show that π lies between $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ and $3\sqrt{3}$. 7

OR

(1) State Maclaurin's theorem. Also obtain expansion of $f(x) = \cos x : x \in R$ in the powers of x. 7

(2) Evaluate Limit : 7

(i) $\lim_{x \to 1}\left[\frac{1}{\log x} - \frac{x}{x-1}\right], x \in R^+ - \{1\}$

(ii) $\lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{\cot^2 x}$

(B) Give answer in short : (Any **four**) 4

(1) What do you mean by In-determinant form ?

(2) Evaluate : $\lim_{x \to 0} \frac{9^x - 4^x}{x}$.

(3) State Lagrange's mean value theorem.

(4) Show that the function $f(x) = x^5 + 1, x \in R$ is increasing.

(5) Write the expansion for $(1 + x)^m$ in terms of x.

(6) Can we apply Rolle's Theorem for function $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$?

3. (A) (1) Define : Multiplication of matrices. For matrix A of order $m \times n$ and matrix B of order $n \times p$, prove that $(AB)^T = B^T A^T$. 7

(2) (i) Find the rank of matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. 7

(ii) Verify $A^* = \overline{(A^T)}$ for a matrix $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & i & 4-2i \end{bmatrix}$.

OR

@geniusguruji

(1) Define : Adjoint matrix. For a square matrix A of order n, prove that $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A|\, I_n$. **7**

(2) (i) Find A^{-1} of a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. **7**

(ii) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ as a sum of symmetric and skew-symmetric matrix.

(B) Give answer in short : (Any **three**) **3**

(1) Define : Lower triangular matrix with illustration.

(2) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ is skew-symmetric matrix, then find the value of x.

(3) Write the condition for the existence of inverse of a square matrix.

(4) If A is symmetric matrix then, $A + A^T$ – a symmetric or skew-symmetric matrix ?

(5) Find A^{-1} for a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

4. (A) (1) If λ ($\lambda \neq 0$) is an Eigen value of an invertible matrix $A = [a_{ij}]_n$, then show that **7**

(i) $\frac{1}{\lambda}$ is the Eigen value of A^{-1}.

(ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ is the Eigen value of adj A.

(2) (i) Find the Eigen values and Eigen vector corresponding to any one Eigen value of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **7**

(ii) Discuss the consistency of the following system of equations :

$x + 2y + z = 2,\ 2x + 4y + 3z = 3,\ 3x + 6y + 5z = 4.$

OR

(A) (1) State Cayley-Hamilton theorem. Also verify Cayley-Hamilton theorem for a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. 7

(2) (i) For a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ find a matrix represented by the matrix polynomial $A^6 - 3A^5 + 2A^4 - 2A^3 + 5A^2 - 3A + I$. 7

(ii) Solve the following system of equations by Crammer's rule :

$x + y + z = 6,\ 2x - y + z = 3,\ x + 3y - z = 4$

(B) Give answer in short : (Any **three**) 3

(1) Write down the characteristic equation of a square matrix A.

(2) Write the Eigen values of any diagonal matrix.

(3) If an Eigen value of a square matrix A is '–2', what will be Eigen values of A^2 and A^3 ?

(4) For a system of linear equations, when infinite solution exist ?

(5) Define : Consistent system.

@geniusguruji