Seat No. : _______________

MK-114

April-2018

B.Sc., Sem.-I

CC-3-101 : Mathematics
(Calculus & Matrix Algebra)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **પાંચ** પ્રશ્નો છે.

(2) પાંચમો પ્રશ્ન હેતુલક્ષી છે.

(3) **બધા** જ પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.

1. (a) લાયબ્નીઝ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

અનંત વાસ્તવિક ધન પદોવાળી શ્રેઢી માટે દ' એલમ્બર્ટની ગુણોત્તર કસોટી લખો અને સાબિત કરો.

(b) (1) જો $y = \dfrac{2x+1}{(x-1)(2x-1)}$ જ્યાં $x \neq 1, \dfrac{1}{2}$ હોય તો y_n શોધો. **7**

(2) જો $y = \sin(m \cos^{-1} x)$; $x \in \,]-1, 1[$ હોય તો સાબિત કરો કે

$$(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$$

અથવા

શ્રેઢીની અભિસારીતા ચર્ચો.

(1) $\Sigma(-1)^n\, [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\,]$

(2) $\Sigma \dfrac{n}{n^2+1} x^n$

2. (a) લાગ્રાન્જનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

મેકલોરીનનું પ્રમેય લખો. તેનો ઉપયોગ કરી $f(x) = \cos x;\ x \in R$ નું xના ઘાતમાં વિસ્તરણ મેળવો.

(b) (1) જો $3a - 4b + 6c - 12d = 0$ હોય તો સાબિત કરો કે ત્રિઘાત સમીકરણ, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ નું એક બીજ -1 અને 0 વચ્ચે આવેલ છે.

(2) $\log(\cos x)$ ના વિસ્તરણમાં x^4 નો સહગુણક મેળવો. **7**

અથવા

લક્ષ મેળવો.

(1) $\lim\limits_{x \to 1}\left[\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{x}{x-1}\right], x \in R^+ - \{1\}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

3. (a) જો A એ $m \times n$ કક્ષાનો અને B એ $n \times p$ કક્ષાનો શ્રેણિક હોય તો બતાવો કે $(AB)^T = B^T A^T$. **7**

અથવા

જો A એ n-કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણિક હોય તો બતાવો કે

$A\,(\mathrm{adj}\ A) = (\mathrm{adj}\ A)A = |A|\ I_n$.

(b) (1) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શોધો. **7**

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ને સંમિત અને વિ-સંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો.

અથવા

(1) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો.

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & i & 4-2i \end{bmatrix}$ માટે ચકાસો કે $A^* = \overline{(A^T)}$.

4. (a) વ્યાખ્યા આપો : શ્રેણિકનું લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશ. જો $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ એ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_n$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો હોય, તો શ્રેણિક A^3ના લાક્ષણિક મૂલ્યો $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \ldots \lambda_n^3$ છે. સાબિત કરો. **7**

અથવા

બતાવો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ તેના લાક્ષણિક સમીકરણને સંતોષે છે તે પરથી A^{-1} શોધો.

(b) (1) આપેલ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ ક્રેમરની રીતે મેળવો. **7**

$x + y + z = 6, x + 2y + 3z = 14, x + 4y + 9z = 36.$

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો મેળવો તથા કોઈપણ એક લાક્ષણિક મૂલ્યને અનુરૂપ લાક્ષણિક સદીશ શોધો.

અથવા

(1) λ અને μ ની કઈ કિંમતો માટે સમીકરણ સંહતિ $x + y + z = 6, x + 2y + 3z = 10, x + 2y + \lambda z = \mu$ ને (i) કોઈ ઉકેલ નથી (ii) અનન્ય ઉકેલ છે.

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે શ્રેણિક બહુપદી,

$A^8 - 4A^7 - A^6 + 4A^5 - A^4 + 4A^3 + 2A^2 - 3A + I$ વડે નિરૂપણ પામતો શ્રેણિક શોધો.

5. કોઈપણ **સાત** પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : **14**

(1) જો $y = \dfrac{1}{\sec x}$ હોય તો y_n શોધો.

(2) ઘાત શ્રેઢી $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ ની અભિસાર ત્રિજ્યા મેળવો.

(3) વિધેય $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ માટે રોલનું મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રયોજી શકાય કે કેમ ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

(4) બતાવો કે $f(x) = x^3 + 1, x \in R$ માટે વધતું વિધેય છે.

(5) વિધેય $(1 + x)^m$ નું વિસ્તરણ x ના પદમાં લખો.

(6) લક્ષ મેળવો $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

(7) નિમ્ન ત્રિકોણીય શ્રેણિકની વ્યાખ્યા ઉદાહરણ સહિત આપો.

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો લખો.

(9) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો.

Seat No. : _______________

MK-114

April-2018

B.Sc., Sem.-I

CC-3-101 : Mathematics
(Calculus & Matrix Algebra)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) There are **five** questions.
(2) Fifth question is objective.
(3) **All** questions carry equal marks.

1. (a) State and prove Leibnitz's theorem. **7**

OR

State and prove De'Alembert ratio test for the infinite positive series.

(b) (1) If $y = \dfrac{2x+1}{(x-1)(2x-1)}$ where $x \neq 1, \dfrac{1}{2}$ then find y_n. **7**

(2) If $y = \sin(m \cos^{-1} x)$; $x \in]-1, 1[$ then prove that

$(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n + 1)x y_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$

OR

Discuss the Convergence of the following series :

(1) $\Sigma(-1)^n [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}]$

(2) $\Sigma \dfrac{n}{n^2+1} x^n$

2. (a) State and prove Langrange's mean value theorem. **7**

OR

State Maclaurin's theorem. Using this obtain expression for $f(x) = \cos x;\ x \in R$ in the powers of x.

(b) (1) If $3a - 4b + 6c - 12d = 0$ then show that one root of cubic equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ lies between -1 and 0.

(2) Find the co-efficient of x^4 in the expansion of $\log(\cos x)$. **7**

OR

Evaluate limit :

(1) $\lim\limits_{x \to 1}\left[\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{x}{x-1}\right], x \in R^+ - \{1\}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

3. (a) For matrix A of order m × n and matrix B of order n × p prove that $(AB)^T = B^T A^T$. **7**

OR

For a square matrix A of order n, Prove that $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I_n$.

(b) (1) Find the rank of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. **7**

(2) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ as a sum of symmetric and skew symmetric matrix.

OR

(1) Find the inverse of a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

(2) Verify $A^* = \overline{(A^T)}$ for a matrix $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & i & 4-2i \end{bmatrix}$.

4. (a) Define : Eigen value and Eigen vector of a matrix. If $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are the eigen values of a matrix $A = [a_{ij}]_n$ then prove that the eigen values of matrix A^3 are $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \ldots, \lambda_n^3$. **7**

OR

Show that a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ satisfies its characteristics equation. Hence find A^{-1}.

(b) (1) Solve the following system of equations by Cramer's rule : **7**

$x + y + z = 6, x + 2y + 3z = 14, x + 4y + 9z = 36.$

(2) Find the eigen values of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Also find an eigen vector corresponding to any one of its eigen values.

OR

(1) For which values of λ and μ, the following system of equations has (i) no solution (ii) unique solution.

$x + y + z = 6, x + 2y + 3z = 10, x + 2y + \lambda z = \mu$

(2) For a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ find a matrix represented by the matrix polynomial $A^8 - 4A^7 - A^6 + 4A^5 - A^4 + 4A^3 + 2A^2 - 3A + I$.

5. Answer the following questions in short : (any **seven**) **14**

(1) If $y = \dfrac{1}{\sec x}$ then find y_n.

(2) Find the radius of convergence of power series $\sum \dfrac{x^n}{n!}$.

(3) Can we apply Rolle's theorem for function $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$? Justify your answer.

(4) Show that the function $f(x) = x^3 + 1, x \in R$ is increasing.

(5) Write the expression for $(1 + x)^m$ in terms of x.

(6) Evaluate : $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

(7) Define Lower triangular matrix with illustration.

(8) Write the eigen values of matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(9) State Caley-Hamilton theorem.
