

**DE-107**

December-2021

B.Sc., Sem.-III

**201 : Mathematics  
(Advanced Calculus-1)****[Max. Marks : 50]**

Time : 2 Hours]

- સૂચના : (1) પ્રશ્ન નંબર 1 થી 8 પૈકી કોઈપણ ત્રણના જવાબ આપો.  
 (2) પ્રશ્ન નંબર 9 ફરજિયાત છે.  
 (3) પ્રશ્નપત્રમાં આપેલ પ્રશ્ન નંબર મુજબ જ ઉત્તરવહીમાં નંબર લખવા.  
 (4) જમણી બાજુના આંકડાઓ કુલ ગુણ દર્શાવે છે.

1. (a) જો વિધેય  $\phi(x)$  એ  $a$  બિંદુ એ સતત હોય અને  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l$  હોય, તો સાબિત કરો કે  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, \phi(x))$  અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને તે  $l$  ની બરાબર છે. 7
- (b) સાબિત કરો કે  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$  7
2. (a) બહુચર વિધેયો માટે સતત વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો તથા વિધેય  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  માટે બિંદુ  $(0, 0)$  એ સાતત્યતાની ચર્ચા કરો. 7
- (b) ક્રમિક લક્ષ વ્યાખ્યાયિત કરો તથા વિધેય  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  માટે બિંદુ  $(0, 0)$  એ ક્રમિક લક્ષ મેળવો અને વિધેય  $f(x, y)$  માટે બિંદુ  $(0, 0)$  આગળ લક્ષની ચર્ચા કરો. 7
3. (a) દ્વિચલ વિધેય માટે વિકલન વ્યાખ્યાયિત કરો તથા વિધેય  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  માટે એ બિંદુ  $(0, 0)$  આગળ વિકલનીય છે કે કેમ તે ચકાસો. 7
- (b) વિધેય  $f(x, y) = \frac{2x - y}{x + y}$  માટે  $f_{xy} = f_{yx}$  ની ચકાસણી કરો. 7
4. (a) ચંગનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
- (b) જો  $u = x + y + z$ ,  $v = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  હોય, તો  $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$  શોધો. 7

5. (a) સમપરિમાણીય વિધેય માટે ઓઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7  
 (b) વિધેય  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$  માટેના સ્થિર મૂલ્યો મેળવો. 7
6. (a) સાબિત કરો કે વિવૃત ગણ  $E \subset \mathbb{R}^2$  ઉપર વ્યાખ્યાયિત અને વિકલનીય વાસ્તવિક વિધેય  $f$  ને  $(a, b) \in E$  બિંદુએ સ્થિર મૂલ્યો હોવા માટેની જરૂરી શરતો  $f_x(a, b) = 0$  અને  $f_y(a, b) = 0$  છે. 7  
 (b) સમપરિમાણીય વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો અને વિધેય  $u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ ,  $x + y \neq 0$  માટે સાબિત કરો કે
- $$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u \text{ તથા}$$
- $$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ મેળવો.}$$
7. (a) બે ચલોનાં વિધેય માટે ટેઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7  
 (b) વક્ર  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  માટે જો અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય, તો દ્વિક બિંદુ શોધો તથા મેળવેલ દ્વિક બિંદુનો પ્રકાર નક્કી કરો. 7
8. (a) વક્ર  $y = f(x)$  માટે વક્રતા ત્રિજ્યા માટેનું સૂત્ર મેળવો. 7  
 (b) વિધેય  $f(x, y) = \sin x \sin y$  નું  $x$  અને  $y$  ની ધાતમાં વિસ્તરણ કરો. 7
9. ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે ચાર) 8
- (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$  નું અસ્તિત્વ ચકાસો.  
 (2) વિધેય  $f(x, y) = xy + 1$  ની  $(1, 2)$  બિંદુએ સાતત્યતા ચર્ચો.  
 (3) જો  $u = x^y$  હોય, તો  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  મેળવો.  
 (4) સ્વરિત વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો તથા વિધેય  $f(x, y) = x^2 y^3$  સ્વરિત વિધેય છે કે કેમ ચકાસો.  
 (5) વિધેય  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  માટે  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$  મેળવો.  
 (6) પરવલય  $y = x^2$  ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.

**DE-107**

December-2021

B.Sc., Sem.-III

**201 : Mathematics  
(Advanced Calculus-1)**

Time : 2 Hours]

[Max. Marks : 50

- Instructions :**
- (1) Answer any **three** questions from Ques. 1 to 8.
  - (2) Question No. 9 Compulsory.
  - (3) Write question no. in Answer-sheet as mentioned in question paper.
  - (4) Right side figures indicate total marks.

1. (a) If the function  $\phi(x)$  is continuous at a point  $a$  and  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l$  exists and is equal to  $l \in R$ , then prove that  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, \phi(x))$  exists and is equal to  $l$ . 7
- (b) Show that  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$  7
2. (a) Define Continuity of a function of several variables and discuss the continuity of function  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  at  $(0, 0)$ . 7
- (b) Define iterated limits and find iterated limits of function  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  at  $(0, 0)$  and discuss limit of  $f(x, y)$  at the point  $(0, 0)$ . 7
3. (a) Define Differentiability of a function of two variables and examine differentiability of a function  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  at  $(0, 0)$ . 7
- (b) Verify that  $f_{xy} = f_{yx}$  for the function  $f(x, y) = \frac{2x - y}{x + y}$ . 7
4. (a) State and prove Young's theorem. 7
- (b) If  $u = x + y + z$ ,  $v = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ , then find  $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ . 7

5. (a) State and prove Euler's theorem for homogenous function. 7
- (b) Find the extreme values of the function  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ . 7
6. (a) Prove that the necessary conditions that a real valued function  $f$ , defined on an open domain  $E \subset \mathbb{R}^2$  and is differentiable at point  $(a, b) \in E$  has an extreme value at  $(a, b)$  are  $f_x(a, b) = 0$  &  $f_y(a, b) = 0$ . 7
- (b) Define Homogenous function and for function  $u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ ,  $x + y \neq 0$ .  
 Prove that  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$  and  
 Find  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . 7
7. (a) State and prove Taylor's theorem for function of two variables. 7
- (b) If exist find the double point of the curve  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  and discuss the nature of the double point. 7
8. (a) Derive the formula to find the radius of curvature of a curve  $y = f(x)$ . 7
- (b) Expand  $f(x, y) = \sin x \sin y$  in the powers of  $x, y$ . 7
9. Give answer in brief : (any four) 8
- (1) Check whether  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$  exist.
- (2) Discuss the continuity for the function  $f(x, y) = xy + 1$  at point  $(1, 2)$ .
- (3) If  $u = x^y$ , then find  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .
- (4) Define Harmonic function and check whether the function  $f(x, y) = x^2 y^3$  is harmonic.
- (5) If  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ , then find  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ .
- (6) Find the radius of curvature of parabola  $y = x^2$ .