

# DD-103

December-2018

B.Sc., Sem.-III

CC-201 : Mathematics  
(Advanced Calculus – I)

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70

સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) સર્વત્ર સંકેતો પ્રચલિત છે.

(3) જમણી તરફના અંકો પ્રશ્નો/પેટા પ્રશ્નોના ગુણ દર્શાવે છે.

1. (A) (i) દ્વિચલ વિધેયના લક્ષની વ્યાખ્યા આપો અને વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી લક્ષ

7

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{x^2 + y^2}{xy} \text{ મેળવો.}$$

(ii) આપેલ વિધેયનું આપેલ બિંદુ પાસે સાતત્ય ચર્ચો.

7

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x + y} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ બિંદુ } (0, 0) \text{ પાસે.}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) & \text{જો } x \neq 0 \\ 0 & \text{જો } x = 0 \end{cases} \text{ બિંદુ } (0, 1) \text{ પાસે.}$$

અથવા

(i) પુનરાવર્તિત લક્ષની વ્યાખ્યા આપો. આપેલ વિધેયનું પુનરાવર્તિત લક્ષ  $(0, 0)$  બિંદુ પાસે મેળવો. 7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(ii) આપેલ લક્ષ જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો લક્ષ મેળવો.

7

(1)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  જ્યાં

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  જ્યાં

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x + y)}{x + y} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(B) નીચેનામાંથી કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

4

- (1) શું આપેલ વિધેયો  $f(x, y) = xy + 2$  અને  $f(x, y) = \frac{2x}{2x - y}$  બિંદુ  $(1, 2)$  પાસે સતત છે ?
- (2)  $a \in \mathbb{R}^n$ ના લંબચોરસ પડોશીગણની વ્યાખ્યા આપો.
- (3) એવા એક દ્વિચલ વિધેયનું ઉદાહરણ આપો જે બિંદુ  $(1, 1)$  પાસે સતત ના હોય.

2. (A) (i) ચંગનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

7

(ii) આપેલ વિધેય  $f$  માટે  $f_{xx}(0, 0)$ ,  $f_{yy}(0, 0)$ ,  $f_{yx}(0, 0)$  અને  $f_{xy}(0, 0)$  જ્યાં

7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

અથવા

(i) શ્વાર્ઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

7

(ii) આપેલ વિધેયો વિકલનીય છે તે ચકાસો.

7

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \text{ બિંદુ } (0, 0) \text{ પાસે.} \\ 0 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  બિંદુ  $(0, 0)$  પાસે.

(B) નીચેનામાંથી કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

4

- (1) વિધેય  $f(x)$ ના દ્વિ વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.
- (2) હાર્મોનિક વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

(3) જો  $u = e^{xy}$ , તો  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  શોધો.

3. (A) (i) જેમના દ્વિતીય આંશિક વિકલીતો અસ્તિત્વ ધરાવે તેવા  $m$  ધાતીય સમપરિમાણીય વિધેય  $H = f(x, y)$  નું વિધેય  $u = \phi(H)$  હોય તો સાબિત કરો કે. 7

$$(1) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = m \frac{F(u)}{F'(u)} F'(u) (\neq 0) = G(u) \text{ (sny).}$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u) (G'(u) - 1).$$

જ્યાં  $H = f(x, y) = F(u)$ .

- (ii) (1) જો  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy}$ , તો સાબિત કરો કે 7

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- (2) વિધેય  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$  માટે સ્થાનીય સ્થિર મૂલ્યો શોધો.

અથવા

- (i) સમપરિમાણીય વિધેય માટેનો યુલરનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

- (ii) જો  $u = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ , હોય, તો સાબિત કરો કે  $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$  7

- (B) નીચેનામાંથી કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો : 3

- (1) સમપરિમાણીય વિધેયની વ્યાખ્યા આપી એક ઉદાહરણ આપો.

- (2) આપેલ સમપરિમાણીય વિધેય  $z = \frac{x^{2/3} + x^{7/2} y^{7/2}}{x^5 + y^5}$  ની ઘાત શોધો.

- (3)  $x^2 y^2$  નું સ્થાનીય સ્થિર મૂલ્ય  $x - y = 1$  શરત નીચે શોધો.

4. (A) (i) વક્ર  $r = f(\theta)$  ની વક્રતા ત્રિજ્યા ધ્રુવીય સ્વરૂપે શોધો.

(ii) દ્વિચલ વિધેય માટેનો ટેઈલરનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

અથવા

(i) (1) વિધેય  $f(x, y) = e^{ax} \sin by$  નું  $x$  અને  $y$  ની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

(2) વક્ર  $x^2 + y^2 = a^2$  ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.

(ii) વક્ર  $r = a(1 - \cos \theta)$  ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.

(B) નીચેનામાંથી કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

(1) બહુવિધ બિંદુ અને દિક બિંદુની વ્યાખ્યા આપો.

(2) જો આપેલ દિક બિંદુ નિશ્ચિત હોય તો  $r$ ,  $s$  અને  $t$  વચ્ચે શું સંબંધ હોય ?

(3) કો-જન્યુગેટ બિંદુની વ્યાખ્યા આપો.

# DD-103

December-2018

B.Sc., Sem.-III

CC-201 : Mathematics  
(Advanced Calculus - I)

[Max. Marks : 70]

Time : 2:30 Hours

- Instructions :**
- (1) All the questions are compulsory.
  - (2) Notations are usual, everywhere.
  - (3) Figures to the right indicate marks of the question/sub-question.

1. (A) (i) Define limit of function of two variables. Use the definition to find 7

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

(ii) Discuss the continuity of following functions at given point. 7

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x + y} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ at point } (0, 0)$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \text{ at point } (0, 1)$$

OR

(i) Define iterated limits. Find the iterated limit for 7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ at point } (0, 0)$$

(ii) Evaluate the following limit if exists. 7

(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  where

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  where

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(B) Attempt any two :

4

- (1) Is the function  $f(x, y) = xy + 2$  &  $f(x, y) = \frac{2x}{2x - y}$  continuous at point  $(1, 2)$ .
- (2) Define rectangular nbhd of  $a \in \mathbb{R}^n$ .
- (3) Give one example of function of two variables which is discontinuous at point  $(1, 1)$ .

2. (A) (i) State and prove Young's theorem. 7

(ii) Find  $f_{xx}(0, 0)$ ,  $f_{yy}(0, 0)$ ,  $f_{yx}(0, 0)$  and  $f_{xy}(0, 0)$  for the function 7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

OR

(i) State and prove Schartz's theorem. 7

(ii) Discuss the differentiability of the following functions : 7

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ at point } (0, 0)$$

$$(2) f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ at point } (0, 0)$$

(B) Attempt any two :

4

(1) Define directional derivative of function  $f(x)$ .

(2) Define harmonic function.

(3) If  $u = e^{xy}$ , then find  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

3. (A) (i) If  $u = \phi(H)$  is function of a homogeneous function  $H = f(x, y)$  of degree  $m$  whose partial derivatives of second order exists, then 7

$$(1) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = m \frac{F(u)}{F'(u)} F'(u) (\neq 0) = G(u) \text{ (say).}$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u) (G'(u) - 1).$$

Where  $H = f(x, y) = F(u)$ .

- (ii) (1) If  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy}$ , then prove that 7

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- (2) Find the extreme values of  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ .

OR

- (i) State and prove Euler's theorem for homogeneous function. 7

- (ii) If  $u = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ , then prove that  $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ . 7

- (B) Attempt any two : 3

- (1) Define homogeneous function with one example.

- (2) Find the degree of the homogeneous function  $z = \frac{x^{2/3} + x^{7/2} y^{7/2}}{x^5 + y^5}$ .

- (3) Find the extreme value of  $x^2 y^2$  under condition that  $x - y = 1$ .

4. (A) (i) Find the radius of curvature of a curve  $r = f(\theta)$  i.e. in polar equations. 7

- (ii) State and prove Taylor's Theorem for the function of two variables. 7

OR

(i) (1) Expand  $f(x, y) = e^{ax} \sin by$  in the power of  $x$  and  $y$ .

7

(2) Find the radius of curvature of a curve  $x^2 + y^2 = a^2$ .

(ii) Find the radius of curvature of curve  $r = a(1 - \cos \theta)$ .

7

(B) Attempt any two :

3

(1) Define multiple point and double point.

(2) If double point is Cusp, then what is the relation between  $r$ ,  $s$  and  $t$ .

(3) Define conjugate point.