DE-103

December-2018

B.Sc., Sem.-III

202 : Mathematics

(Linear Algebra – 1)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચનો : (1) નોંધો અને પરિભાષાઓ પ્રમાણભૂત છે.

(2) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

1. (a) (i) સદિશ અવકાશ V માં, સાબિત કરો કે : **7**

(1) $\alpha.0 = 0$ દરેક સદિશ α માટે

(2) $0.u = 0$ દરેક સદિશ $u \in V$ માટે

(3) $(-1).u = -u$ દરેક સદિશ $u \in V$ માટે

(ii) સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશના કોઈપણ બે ઉપાવકાશનો સરવાળો એ ઉપાવકાશ થાય. **7**

અથવા

(i) સદિશ અવકાશ V નાં અરિક્ત ઉપગણ S માટે સાબિત કરો કે [S] એ S ને સમાવતો સૌથી નાનો ઉપાવકાશ છે.

(ii) જો U અને W એ સદિશ અવકાશ V નાં બે ઉપાવકાશ હોય, તથા $Z = U + W$ હોય તો, સાબિત કરો કે જો $Z = U \oplus W$ હોય, તો અને તો જ Z નાં કોઈપણ સદિશ ને $z = u + w$, $u \in U, w \in W, z \in Z$ તરીકે એક અને માત્ર એક જ રીતે દર્શાવી શકાય.

(b) સંક્ષિપ્તમાં જવાબ આપો : (ગમે તે બે) **4**

(i) જો $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ હોય, તો A એ R^3 નો ઉપાવકાશ છે કે નહિ તેની ચકાસણી કરો.

(ii) સાબિત કરો કે $(3, 7) \notin [(1, 2), (3, 6)]$.

(iii) સદિશ અવકાશ R^3 માં જો $A = \{\alpha(1, 2, 0) \mid \alpha \in R\}$ અને $B = \{\beta(0, 1, 2) \mid \beta \in R\}$, હોય, તો $A + B$ મેળવો તથા ચકાસો કે $A + B$ એ R^3 નો ઉપાવકાશ છે કે નહિ.

2. (a) (i) જો V એ સદિશ અવકાશ હોય, અને dim V = n હોય, તથા જો $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ એ V નો સુરેખ સ્વાયત ઉપગણ હોય, તો સાબિત કરો કે એવો ગણ $\{v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\} \subset V$ મળે કે, જેથી ગણ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ એ સદિશ અવકાશ V નો આધાર થાય. 7

(ii) સદિશ અવકાશ V નો આધાર વ્યાખ્યાયિત કરો તથા A = {(1, 0, 1, 0), (0, –1, 1, 0)} ને સદિશ અવકાશ R^4 ના આધાર સુધી વિસ્તૃત કરો. 7

અથવા

(i) સાંત પરિમાણીય સદિશ અવકાશ V નાં બે ઉપાવકાશ U અને W માટે સાબિત કરો કે $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W)$.

(ii) જો B = {(2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 2, 1)} હોય, તો સાબિત કરો કે B એ સદિશ અવકાશ R^3 નો આધાર છે. તથા આધાર B ની સાપેક્ષ સદિશ $x = (1, 2, 1)$ નો સાપેક્ષ યામ મેળવો.

(b) સંક્ષિપ્તમાં જવાબ આપો : (ગમે તે બે) 4

(i) સદિશ અવકાશ R^3 માં ગણ {(–3, 0, 1), (1, 2, 1), (3, 0, 1)} નાં વિસ્તૃતિ ગણનું પરિમાણ મેળવો.

(ii) સદિશ અવકાશ R^3 માં આધાર B = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} ની સાપેક્ષે સદિશ (3, 5, –2) નો સાપેક્ષ યામ મેળવો.

(iii) સદિશ અવકાશ R^2 માં ગણ {(1, 2), (2, 4), (3, 6)} નાં વિસ્તૃતિ ગણનો આધાર મેળવો.

3. (a) (i) સુરેખ પરિવર્તન $T : R^3 \to R^3, T(a, b, c) = (a + b, b + c, c)$ માટે કોટયાંક-શૂન્યાંક પ્રમેયની ચકાસણી કરો. 7

(ii) જો $T : U \to V$ એ વ્યસ્ત સંપન્ન સુરેખ વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે $T^{-1} : V \to U$ એ સુરેખ, એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય થાય. 7

અથવા

(i) જો $T : R^3 \to R^2$ એ $T(1, 1, 0) = (1, 0)$, $T(1, 0, 1) = (0, 1)$, $T(0, 1, 1) = (1, -1)$ થી વ્યાખ્યાયિત થતો સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો $(a, b, c) \in R^3$ માટે $T(a, b, c)$ મેળવો તથા $N(T)$ શોધો.

(ii) સુરેખ પરિવર્તન $T : U \to V$ માટે, સાબિત કરો કે,

(1) જો T એક-એક વિધેય હોય, તો અને તો જ $N(T)=\{0_U\}$

(2) જો $[u_1, u_2, ..., u_n] = U$, તો $R(T) = [T(u_1), T(u_2), ..., T(u_n)]$ થાય.

(b) સંક્ષિપ્તમાં જવાબ આપો : (ગમે તે બે) 3

(i) કોટયાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય લખો.

(ii) જો સુરેખ પરિવર્તન $T : R^2 \to R^3$ એ $T(1, 1) = 1$ અને $T(0, 1) = 3$ થી વ્યાખ્યાયિત થાય, તો $T(2, 3)$ ની કિંમત મેળવો.

(iii) જો સુરેખ પરિવર્તન $T : R^3 \to R^3$ એ એક-એક વિધેય હોય, તો T નો કોટયાંક શોધો.

4. (a) (i) જો $M_{m \times n}(R)$ એ $m \times n$ પ્રકારના વાસ્તવિક શ્રેણિકોનો ગણ હોય, તો સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશ $M_{m \times n}(R)$ નું પરિમાણ m.n છે. 7

(ii) $T : R^2 \to R^2$ એ $T(x, y) = (2x, 3x - 2y)$ થી વ્યાખ્યાયિત થતો સુરેખ પરિવર્તન હોય અને $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$, $B_2 = \{e_1, e_2\}$ એ R^2 ના બે આધાર હોય, તો શ્રેણિક $(T : B_1, B_2)$ મેળવો. 7

અથવા

(i) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ માટે કોટયાંક અને શૂન્યાંક મેળવો.

(ii) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, અને $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0)\}$, $B_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ એ અનુક્રમે R^3 અને R^2 ના આધાર હોય, તો આધાર B_1 અને B_2 ને સંબંધિત A નો સુરેખ પરિવર્તન શોધો.

(b) સંક્ષિપ્તમાં જવાબ આપો : (ગમે તે બે) 3

(i) $M_3(R)$ માં $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ માટે n(T) શોધો.

(ii) જો સુરેખ પરિવર્તન $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x, y)$ હોય, તથા $B_1 = B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ હોય, તો T ને સંબંધિત શ્રેણિક મેળવો.

(iii) જો A એ 4 × 5 ક્રમનો, શૂન્યેતર શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે A નાં સ્તંભ સદિશો R^4 માં સુરેખ અવલંબી થાય.

DE-103

December-2018

B.Sc., Sem.-III

202 : Mathematics

(Linear Algebra – I)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) Notations and terminologies are standard.
(2) All the questions are compulsory.

1. (a) (i) In a vector space V, prove following : 7
   (1) $\alpha.0 = 0$ for every scalar α
   (2) $0.u = 0$ for every scalar $u \in V$
   (3) $(-1).u = -u$ for every scalar $u \in V$.

   (ii) Prove that sum of two subspaces of a vector space is also a subspace. 7

   OR

   (i) Let S be a non-empty subset of a vector space V, then prove that [S] is the smallest subspace of V containing S.

   (ii) Let U and W be two subspaces of a vector space V and $Z = U + W$. Prove that $Z = U \oplus W$ if and only if any vector $z \in Z$ can be expressed uniquely as the sum $z = u + w$, $u \in U$, $w \in W$.

   (b) Give the answer in brief : (any two) 4
   (i) Let $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Is A subspace of R^3 ? Justify.
   (ii) Show that $(3, 7) \notin [(1, 2), (3, 6)]$.
   (iii) In R^3 let $A = \{\alpha(1, 2, 0) \mid \alpha \in R\}$, $B = \{\beta(0, 1, 2) \mid \beta \in R\}$, then find $A + B$ and check whether it is subspace of R^3.

2. (a) (i) Let V be a vector space and dim V = n. If $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ is a linearly independent subset of V, then prove that there exist set $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\} \subset V$ such that $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ forms a basis of a vector space V. 7

   (ii) Define basis of a vector space. Extend $A = \{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0)\}$ upto a basis of vector space R^4. 7

   OR

(i) If U and W are two subspaces of finite dimensional vector space V, then prove that $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W)$.

(ii) Let $B = \{(2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 2, 1)\}$. Prove that B is a basis of R^3 and obtain co-ordinate vector of $x = (1, 2, 1)$ relative to ordered basis B.

(b) Give the answer in brief : (any **two**) 4

(i) What is dimension of the subspace of R^3 spanned by $\{(-3, 0, 1), (1, 2, 1), (3, 0, 1)\}$?

(ii) In a vector space R^3, find co-ordinate vector of $(3, 5, -2)$ relative to the ordered basis $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(iii) Find the basis of a subspace of R^2, spanned by the set of vectors $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$.

3. (a) (i) Let $T: R^3 \to R^3$ be a linear transformation defined by $T(a, b, c) = (a + b, b + c, c)$. Verify Rank-Nullity Theorem. 7

(ii) Prove that if $T : U \to V$ is a non-singular linear map, then $T^{-1} : V \to U$ is a linear, one-one and onto map. 7

OR

(i) Let $T : R^3 \to R^2$ be a linear transformation defined by $T(1, 1, 0) = (1, 0)$, $T(1, 0, 1) = (0, 1)$, $T(0, 1, 1) = (1, -1)$. For $(a, b, c) \in R^3$, obtain $T(a, b, c)$ and find $N(T)$.

(ii) Let $T : U \to V$ be a linear map. Prove that

(1) T is one-one if and only if $N(T)=\{0_U\}$

(2) If $[u_1, u_2, ..., u_n] = U$, then $R(T) = [T(u_1), T(u_2), ..., T(u_n)]$.

(b) Give the answer in brief : (any two) 3

(i) State Rank-Nullity Theorem.

(ii) Let $T : R^2 \to R$ be a linear transformation defined by $T(1, 1) = 1$ and $T(0, 1) = 3$, then find $T(2, 3)$.

(iii) Let $T : R^3 \to R^3$ be a one-one linear transformation. Find Rank of T.

4. (a) (i) Let $M_{m \times n}(R)$ be the set of all $m \times n$ type of real matrices. Prove that the dimension of a vector space $M_{m \times n}(R)$ is mn. 7

(ii) Let $T : R^2 \to R^2$ be a linear transformation defined by $T(x, y) = (2x, 3x - 2y)$ and $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$, $B_2 = \{e_1, e_2\}$ be two bases of R^2. Find matrix $(T : B_1, B_2)$. 7

OR

(i) Find the rank and nullity of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(ii) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Find linear transformation associated to A relative to bases $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0)\}$ and $B_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ of R^3 and R^2 respectively.

(b) Give the answer in brief : (any two) 3

(i) In $M_3(R)$ if $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, then find n(T).

(ii) If linear transformation $T : R^2 \to R^2$ is defined by $T(x, y) = (x, y)$ and basis $B_1 = B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, then obtain matrix associated with T.

(iii) If A is non-zero 4×5 matrix, then show that column vectors of A are linearly dependent in R^4.