Seat No. : _______________

AA-121

April-2019

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **તમામ** પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.
(2) સર્વત્ર સંકેતો પ્રચલિત છે.
(3) જમણી તરફના અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નોના ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (A) (1) સમૂહની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે સમૂહ G માં : **7**
(i) એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ અનન્ય હોય છે.
(ii) વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ અનન્ય હોય છે.

(2) ગણ $G = R - \{-1\}$ ઉપર ક્રિયા $*$ ની વ્યાખ્યા ; $a * b = a + b + ab$ છે; $a, b \in R - \{-1\}$ તો સાબિત કરો કે $*$ દ્વિક ક્રિયા છે અને $(G, *)$ સમૂહ રચે છે. **7**

અથવા

(1) સમશેષ સંબંધની વ્યાખ્યા આપો. ધારો કે $n > 0$ નિયત પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. સાબિત કરો કે n ને સાપેક્ષ સમશેષ સંબંધ સામ્ય સંબંધ છે.

(2) ધન સંમેય સંખ્યાઓના ગણ Q_+ માં દ્વિક-ક્રિયા * ની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે છે. $a * b = \frac{ab}{2}$; જ્યાં $a, b \in Q_+$. સાબિત કરો કે Q_+ આ દ્વિક-ક્રિયા * હેઠળ એક સમૂહ છે.

(B) કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો. **4**
(i) પૂર્ણાંક સંખ્યા $n > 0$ માટે ભાગાકાર વિધિનો પ્રમેય લખો.
(ii) જો $G = \{1, -1, i, -i\}$ ચક્રિય સમૂહ હોય તો G ના દરેક ઘટકની કક્ષા જણાવો.
(iii) R પરની અસંગઠિત દ્વિક-ક્રિયાનું ઉદાહરણ આપો.

2. (A) (1) સાંત સમૂહ G ના ઉપસમૂહ H માટે લાગ્રાંજનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**
(2) સાબિત કરો કે સમૂહ G ના સાંત અશૂન્ય ઉપગણ H માં જો G ની દ્વિક ક્રિયા પણ H ની દ્વિક ક્રિયા હોય તો H એ ઉપગણ છે. **7**

અથવા

(1) જો H એ સમૂહ G નું ઉપસમૂહ છે, $x \in G$ માટે સાબિત કરો કે $x^{-1} Hx = \{x^{-1} 4x : 4 \in H\}$ પણ G નું ઉપસમૂહ છે.
(2) જો H_1 અને H_2 એ G નાં ઉપસમૂહો હોય તો સાબિત કરો કે $H_1 \cap H_2$ પણ G નાં ઉપસમૂહો છે. શું $H_1 \cup H_2$ હંમેશા G નું ઉપ સમૂહ થશે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

(B) કોઈપણ **બે**ના ટૂંકમાં જવાબ આપો. **4**

(i) સાબિત કરો કે જો $a^2 = e \ \forall \ a \in G$ હોય તો G સમક્રમી છે.

(ii) યુલરના પ્રમેયનું વિધાન લખો અને યુલરનું ϕ વિધેય સમજાવો.

(iii) જો $G = < a >$ એ 10 કક્ષાનો ચક્રિય સમૂહ હોય તો સમૂહ Gના બધા જ ઉપસમૂહો લખો.

3. (A) (1) Sn માં પરસ્પર અલગ ચક્રોની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે Sn ના પરસ્પર બે અલગ ચક્રો સમક્રમી છે. **7**

(2) $F, G \in S_6$ માટે, $f = (1\ 3\ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 2)$; $g = (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)\ (5\ \ 6)$ હોય તો (i) fg, (ii) gf, (iii) f^{-1}, (iv) fgf^{-1}, (v) fg^2 મેળવો. **6**

અથવા

(1) નિયત ઉપસમૂહની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે H એ સમૂહ G નો નિયત ઉપસમૂહ હોય તો અને તો જ $a^H\ a^{-1}$ CH જ્યાં $a \in G$. **7**

(2) $S = \{1, 2, 3\}$ પરના તમામ ક્રમચયોની યાદી બનાવો તથા S_3 કોષ્ટક તૈયાર કરો. **6**

(B) કોઈપણ **બે**ના ટૂંકમાં જવાબ આપો. **4**

(i) ચક્ર અને ફેરબદલીની વ્યાખ્યા આપો.

(ii) યુગ્મ અને અયુગ્મ ચક્રોની વ્યાખ્યા આપો.

(iii) બે ચક્રોના સંયોજનની વ્યાખ્યા આપો.

4. (A) (1) સમરૂપતાનું મૂળભૂત પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(2) સાબિત કરો કે સમાન કક્ષાના કોઈપણ બે શાંત ચક્રિય સમૂહો એકરૂપ હોય છે. **6**

અથવા

(1) સમરૂપતાના ગર્ભની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે સમરૂપતા $\phi : (G, 0) \rightarrow (G^{-1}, *)$ નો ગર્ભ k_ϕ એ સમૂહ G નો નિયત ઉપસમૂહ છે. **7**

(2) સમૂહોની એકરૂપતાની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે બે સમૂહો વચ્ચેની એકરૂપતાનો સંબંધ સામ્ય સંબંધ રચે છે. **6**

(B) કોઈપણ **બે**ના ટૂંકમાં જવાબ આપો. **4**

(i) સાબિત કરો કે ચક્રિય સમૂહ હંમેશા સમક્રમી હોય છે.

(ii) કેલેના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(iii) વ્યાખ્યા આપો : એકાંતર સમૂહ અને અવયવ સમૂહ.

Seat No. : _______________

AA-121

April-2019

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** the questions are *compulsory*.
(2) Notations are usual everywhere.
(3) Figures on the right indicate marks of the questions/sub-questions.

1. (A) (1) Define a group. Prove that in a group G : **7**
   (i) There exists unique identity in G, and
   (ii) There exists unique inverse in G.

   (2) If $*$ is an operation defined as $a * b = a + b + ab$ for all $a, b \in G = R - \{-1\}$, then show that $*$ is a binary operation and $(G, *)$ is an group. **7**

   OR

   (1) Define a congruence relation. Prove that "congruence relation. Prove that "congruence modulo n"is an equivalence relation on Z, where $n > 0$ is an integer.

   (2) Show that the set of all positive rational number Q_+ Form G group under the composition defined by $a * b = \frac{ab}{2}$; where $a, b \in Q_+$.

   (B) Answer any **two** of the following in short : **4**
   (i) State division algorithm theorem for integer $n > 0$.
   (ii) In a cyclic group $G = \{1, -1, i, -i\}$. Find order of each element of G.
   (iii) Give an example of a non-associative binary operation on R.

2. (A) (1) State and prove Lagrange's theorem for a sub-group H of a finite group G. **7**

   (2) Prove that a finite non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if it is closed under multiplication. **7**

   OR

   (1) Show that $x^{-1} Hx = \{x^{-1} 4x); 4 \in H\}$ is a subgroup of G if $x \in G$ and H is a subgroup of G.

   (2) If H_1 and H_2 are two subgroups of G then prove that $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G. Is $H_1 \cup H_2$ is always subgroup of G ? Justify your answer.

(B) Answer any **two** of the following in short : **4**

(i) Prove that $a^2 = e$ for each element 'a' of a group G, then G is a commutative.

(ii) State Euler's theorem and explain Euler's ϕ function.

(iii) If G = < a > is a cyclic group of order 10, then obtain all subgroup of G.

3. (A) (1) Define disjoint cycles in Sn. Prove that any two disjoint cycles in Sn are commutative. **7**

(2) For F, G $\in S_6$ find (i) fg, (ii) gf, (iii) f^{-1}, (iv) fgf^{-1}, (v) fg^2, where F = (1 3 4 5 6 2); g = (1 2 4 3) (5 6). **6**

OR

(1) Define normal subgroup of G and prove that if H is a normal subgroup of a group G if and only if $a^H a^{-1} C^H$ for each $a \in G$. **7**

(2) List all permutations on S = {1, 2, 3} and prepare group table for S_3. **6**

(B) Answer any **two** of the following in short : **4**

(i) Define cycle and transposition.

(ii) Define even and odd permutations.

(iii) Define a product of two permutations.

4. (A) (1) State and prove the fundamental theorem of a homomorphism. **7**

(2) Prove that any two finite cyclic group of the same order are isomorphic groups. **6**

OR

(1) Define Kernel of a group homomorphism. Also prove that the Kernel k_ϕ of a homomorphism $\phi : (G, 0) \rightarrow (G^{-1}, *)$ is a normal subgroup of G. **7**

(2) Define an isomorphism of a group. Prove that relation of isomorphism in the set of two groups is an equivalence relation. **6**

(B) Answer any **two** of the following is short : **4**

(i) Prove that cyclic group is always commutative.

(ii) State the Cayley's theorem.

(iii) Define Alternative group and Quotient group.