Seat No. : ________________

ME-108

May-2018

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics

(Abstract Algebra – I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.
(2) સર્વત્ર સંકેતો પ્રચલિત છે.
(3) જમણી તરફના અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટા-પ્રશ્નોના ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (a) સમૂહની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે સમૂહ (G, *) ને અનન્ય એકમ ઘટક હોય છે. **7**

અથવા

ગણ $G = R - \{-1\}$ ઉપર ક્રિયા * ની વ્યાખ્યા $a * b = a + b + ab$ છે ; $a, b, \in R - \{-1\}$ તો સાબિત કરો કે * દ્વિક ક્રિયા છે અને (G, *) સમૂહ રચે છે.

(b) સાબિત કરો કે સમૂહ G માં $(ab)^2 = a^2b^2$; $\forall a, b \in G$ હોય તો અને તો જ G સમક્રમી સમૂહ છે. **7**

અથવા

જો સમૂહ G માટે $(ab)^i = a^ib^i$; $\forall a, b \in G$ જો ત્રણ ક્રમિક પૂર્ણાંકો માટે બને તો સાબિત કરો કે G સમક્રમી સમૂહ છે.

2. (a) સાંત સમૂહ Gના ઉપસમૂહ H માટે લાગ્રાંજનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

જો H_1 અને H_2 એ G ના ઉપસમૂહો હોય તો સાબિત કરો કે $H_1 \cap H_2$ પણ G નું ઉપસમૂહો છે. શું $H_1 \cup H_2$ હંમેશા G નું ઉપસમૂહ થશે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

(b) જો H એ સમૂહ Gનું ઉપસમૂહ છે, $x \in G$ માટે સાબિત કરો કે $x^{-1} H x = \{x^{-1} hx \,/\, h \in H\}$ પણ Gનું ઉપસમૂહ છે. **7**

અથવા

(z_4, t_4) અને ક્લેઈન 4-સમૂહ V_4 માટે લેટાઈસ ડાયગ્રામ દોરો.

3. (a) S_n માં પરસ્પર અલગ ચક્રોની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે S_nના બે પરસ્પર અલગ ચક્રો સમક્રમી છે. **7**

અથવા

નિયત ઉપસમૂહની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે બે નિયત ઉપસમૂહોનો છેદગણ પણ નિયત ઉપસમૂહ છે. વધુમાં જો H એ સમૂહ Gનો નિયત ઉપસમૂહ હોય તો સાબિત કરો કે,

$ghg^{-1} \in H;\ \forall\ g \in G;\ \forall h \in H.$

(b) સમક્રમી ના હોય તેવા સમૂહનું ઉદાહરણ આપો કે જેના બધા જ ઉપસમૂહો નિયત હોય. **7**

અથવા

જો $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ હોય તો $f, g \in S_6$ માટે (1) $f \circ g$ (2) $g \circ f$ (3) f^{-1} (4) fgf^{-1} (5) fg^2 મેળવો.

4. (a) સમરૂપતાનું મૂળભૂત પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

સમૂહોની એકરૂપતાની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે બે સમૂહો વચ્ચેની એકરૂપતાનો સંબંધ સામ્ય સંબંધ રચે છે.

(b) સાબિત કરો કે સમાન કક્ષાના કોઈપણ બે સાત ચક્રિય સમૂહો એકરૂપ હોય છે. **7**

અથવા

સમરૂપતાના ગર્ભની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે સમરૂપતા $\phi : (G, o) \to (G^1, *)$ નો ગર્ભ k_ϕ એ સમૂહ G નો નિયત ઉપસમૂહ છે.

5. નીચેના પૈકી કોઈપણ **સાત**ના જવાબ ટૂંકમાં આપો : **14**

(1) યુલરનું પ્રમેય લખો અને યુલરનું ϕ વિધેય સમજાવો.

(2) કેલેના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(3) સાબિત કરો કે ચક્રિય સમૂહ હંમેશા સમક્રમી હોય છે.

(4) ચક્ર અને ફેરબદલીની વ્યાખ્યા આપો.

(5) ચાર કક્ષાના ચક્રિય સમૂહનું ઉદાહરણ આપો.

(6) R પરની અસંગઠિત દ્વિકક્રિયાનું ઉદાહરણ આપો.

(7) ફરમાટના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(8) વ્યાખ્યા આપો : એકાંતર સમૂહ અને અવયવ સમૂહ

(9) જો $G = \langle a \rangle$ 12 કક્ષાનો ચક્રિય સમૂહ હોય તો સમૂહ Gના બધા જ ઉપસમૂહો લખો.

Seat No. : _______________

ME-108

May-2018

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics

(Abstract Algebra – I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** the questions are compulsory.

(2) Notations are usual everywhere.

(3) Figures on the right indicate marks of the questions/sub-questions.

1\. (a) Define group and prove that every group $(G, *)$ has unique identity. **7**

OR

If $*$ is an operation defined as $a * b = a + b + ab$ for all $a, b \in G = R - \{-1\}$, then show that $*$ is a binary operation and $(G, *)$ is a group.

(b) Prove that G is commutative if and only if $(ab)^2 = a^2b^2$ for $\forall a, b \in G$. **7**

OR

Prove that G is commutative if $(ab)^i = a^ib^i$ for $\forall$ a, b $\in$ G, for any three consecutive integers.

2\. (a) State and prove Lagrange's theorem for a subgroup H of a finite group G. **7**

OR

If H_1 and H_2 are two subgroups of G then prove that $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G. If $H_1 \cup H_2$ is always subgroup of G ? Justify your answer.

(b) Show that $x^{-1} Hx = \{x^{-1}hx/h \in H\}$ is a subgroup of G if $x \in G$ and H is a subgroup of G. **7**

OR

Draw a Lattice diagrams for the groups (i) (z_4, t_4) and (ii) Klein 4-group V_4.

3. (a) Define disjoint cycles in S_n. Prove that any two disjoint cycles in S_n are commutative. **7**

OR

Define normal subgroup. Prove that intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup. Also prove that if H is a normal subgroup of group G then $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, \forall h \in H$.

(b) Give an example of a non-commutative group, each of whose subgroup is normal. **7**

OR

For $f, g \in S_6$, find (i) fog (2) gof (3) f^{-1} (4) fgf^{-1} (f) fg^2, where

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. (a) State and prove that fundamental theorem of a homomorphism. **7**

OR

Define an isomorphism of a group. Prove that relation of isomorphism in the set of all groups is an equivalence relation.

(b) Prove that any two finite cyclic groups of the same order are isomorphic groups. **7**

OR

Define the Kernel of a group homomorphism. Also prove that the Kernel k_ϕ of a homomorphism $\phi : (G, o) \to (G^1, *)$ is a normal subgroup of G.

5. Answer any **seven** of the following in short : **14**

(1) State Euler's theorem and explain Euler's ϕ function .

(2) State the Cayley's theorem.

(3) Prove that Cyclic group is always commutative.

(4) Define cycle and transposition.

(5) Give an example of a cyclic group of order 4.

(6) Give an example of non-associative binary operation on R.

(7) State Fermat's theorem.

(8) Define quotient group and alternative group.

(9) If G = <a> is a cyclic group of order 12, then obtain all subgroups of G.
