Seat No. : ______________

AO-116

April-2022

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics

Advance Calculus-II (Theory)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

સૂચનાઓ :
(1) પ્રશ્નક્રમાંક **1** થી **8** માંથી ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ આપો.
(2) પ્રશ્ન–**9** ફરજીયાત છે.
(3) ઉત્તરવહીમાં પ્રશ્નપત્રમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રશ્નનો અંક લખવો.
(4) જમણી બાજુના અંક જે તે પ્રશ્નના ગુણભાર દર્શાવે છે.

વિભાગ – I

1. (A) કિંમત શોધો : $\iint_R xydxdy$. જ્યાં $R = \{(x, y)/ x \geq 0, y \leq 4, x^2 \leq y\}$ **7**

   (B) યામ સમતલો અને સમતલ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ વડે બંધ ઘનનું ઘનફળ શોધો. **7**

2. (A) ત્રિપલ સંકલનની સમજ આપો. તેનો ઉપયોગ કરી $\int_0^1\int_0^\pi\int_0^\pi y \sin z \, dx\, dy\, dz$નું મૂલ્ય શોધો. **7**

   (B) સંકલન $\int_0^3 \int_{\sqrt{9-y^2}}^{y+6} f(x, y)\, dx\, dy$નો ક્રમ બદલો. **7**

3. (A) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે $\beta(m, n + 1) + \beta(m + 1, n) = \beta(m, n)$ **7**

   (B) સાબિત કરો કે $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$. **7**

4. (A) જો $\bar{r} = (x, y, z)$ અને $r = |\bar{r}|$ હોય તો સાબિત કરો કે $\operatorname{div}(\phi(r)\bar{r}) = 3\phi(r) + r\phi'(r)$. **7**

   (B) બીટા-ગામા વિધેયોનો ઉપયોગ કરી કિંમત શોધો. **7**

   (i) $\int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^6 dx$

   (ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$

5. (A) ગ્રીનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(B) કિંમત શોધો. $\iint_S \bar{f}.n\, ds$ જ્યાં $\bar{f} = (x^3 - yz, -2x^2y, z)$ અને S એ $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$ થી ઘેરાયેલ ચોરસ પેટીનું પૃષ્ઠ છે. 7

6. (A) સ્ટોક્સનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(B) કિંમત શોધો : $\oint (x^2 + y)\, dx + (2x + y^2)\, dy$ જ્યાં C એ (1, 1), (1, 2), (2, 2) અને (2, 1) શિરોબિંદુઓ વાળો ચોરસ છે. 7

7. (A) વિકલ સમીકરણ $(y + z)p + (z + x)q = x + y$નો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો. 7

(B) આંશિક વિકલ સમીકરણ $x^2p + y^2q = (x^2 - y^2)z$નો ઉકેલ મેળવો. 7

8. (A) સાબિત કરો કે પરિભ્રમણીય પૃષ્ઠ $z = f(r)$નું આંશિક વિકલ સમીકરણ $yp - xq = 0$ છે. જ્યાં, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 7

(B) શરતો $z(x, 0) = x^2$ અને $z(1, y) = \sin y$ ને આધીન $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2y$ ઉકેલો. 7

વિભાગ – II

9. ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે **ચાર**) 8

(1) કિંમત શોધો. $\int_0^2 \int_0^x 1\, dy dx.$

(2) સાબિત કરો કે $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.

(3) સાબિત કરો કે $\int_0^1 \sqrt{x}\, \sqrt[3]{(1 - x^2)}\, dx = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right)$.

(4) જો $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ તો $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ શોધો.

(5) સાબિત કરો કે div (curlF) = 0 જ્યાં $F = (f_1, f_2, f_3)$.

(6) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે curl (grad ϕ) = 0.

Seat No. : ______________

AO-116

April-2022

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics

Advance Calculus-II (Theory)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

Instructions :
(1) Attempt any **three** questions from question **1** to **8**.
(2) Question **9** is compulsory.
(3) Write the question number in your answer book as shown in the question paper.
(4) The figures to the right indicate marks of the questions.

Section – I

1. (A) Evaluate : $\iint_R xy\,dx\,dy$. Where $R = \{(x, y)/\ x \geq 0,\ y \leq 4,\ x^2 \leq y\}$ **7**

   (B) Find the volume of solid bounded by the co-ordinate planes and the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. **7**

2. (A) Define : Triple integration and use it to evaluate $\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \sin z\, dx\, dy\, dz$. **7**

   (B) Change the order of integration $\int_0^3 \int_{\sqrt{9-y^2}}^{y+6} f(x, y)\, dx\, dy$. **7**

3. (A) In usual notation, prove that $\beta(m, n + 1) + \beta(m + 1, n) = \beta(m, n)$. **7**

   (B) Prove that $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$. **7**

4. (A) If $\bar{r} = (x, y, z)$ and $r = |\bar{r}|$ then prove that $\text{div}\,(\phi(r)\bar{r}) = 3\phi(r) + r\phi'(r)$ **7**

   (B) Evaluate using Beta-gamma function **7**

   (i) $\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^6 dx$

   (ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$

5. (A) State and prove Green's theorem. 7

(B) Evaluate $\iint_S \overline{f}.n\ ds$, where $\overline{f} = (x^3 - yz, -2x^2y, z)$ and S is the surface of Cube with faces $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$. 7

6. (A) State and prove Stoke's theorem. 7

(B) Evaluate : $\oint (x^2 + y)\,dx + (2x + y^2)\,dy$. Where C is the square having vertices (1, 1), (1, 2), (2, 2) and (2, 1). 7

7. (A) Obtain the general solution of differential equation $(y + z)p + (z + x)q = x + y$. 7

(B) Solve the Partial differential equation $x^2p + y^2q = (x^2 - y^2)z$. 7

8. (A) Prove that the Partial differential equation of the surface of revolution $z = f(r)$ is $yp - xq = 0$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 7

(B) Solve $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2y$, subject to condition $z(x, 0) = x^2$ and $z(1, y) = \sin y$. 7

Section – II

9. Give the answer in brief : (Any **four**) 8

(1) Evaluate $\int_0^2 \int_0^x 1\ dydx$.

(2) Prove that $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.

(3) Prove that $\int_0^1 \sqrt{x}\ \sqrt[3]{(1-x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right)$.

(4) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, then find $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$

(5) Prove that div (curlF) = 0, where $F = (f_1, f_2, f_3)$.

(6) In usual notation prove that curl (grad ϕ) = 0.