Seat No. : ______________

AP-110

April-2022

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics

(Abstract Algebra-I)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

સૂચનાઓ : (1) આપેલ પ્રશ્ન 1 થી 8માંથી કોઈપણ ત્રણ લખવા.

(2) પ્રશ્ન નં.-9 ફરજીયાત છે.

(3) પ્રશ્નપત્રમાં આપેલ પ્રશ્ન ક્રમાંક તમારી ઉત્તરવહીમાં લખો.

(4) જમણી તરફ આપેલ આંકડા પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

1. (a) ધારો કે ~ ગણ Aમાં આપેલ સામ્ય-સંબંધ છે. અને $a \in A$ માટે cl (a), a નો સામ્ય-વર્ગ છે. $a, b \in A$ માટે, સાબિત કરો કે

   (i) $a \sim b \Leftrightarrow cl(a) = cl(b)$

   (ii) $cl(a) \neq cl(b) \Rightarrow cl(a) \cap cl(b) = \phi$ **7**

   (b) સમૂહનાં ઘટકની કક્ષા વ્યાખ્યાયિત કરો. તથા સમક્રમી સમૂહ Gમાં ઘટકો a તથા bની કક્ષા અનુક્રમે m અને n છે. જો $(m, n) = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે ઘટક abની કક્ષા m-n છે. **7**

2. (a) સાબિત કરો કે શ્રેણિકોના ગુણાકારની દ્વિક ક્રિયા તળે ગણ

   $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R,\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$ એ સમજૂતી સમૂહ છે. **7**

   (b) ગણ $\mathbb{Z}$ પર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત સંબંધ S એ સામ્ય સંબંધ છે. તેમ સાબિત કરો જો $n \mid (a - b)$ હોય, તો aSb થાય. જ્યાં $n \in \mathbb{N}$ નિશ્ચિત કરેલ છે $a, b \in \mathbb{Z}$ છે. **7**

3. (a) સાન્ત સમૂહ Gનાં ઉપસમૂહ H માટે લાંગ્રાજનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

   (b) સાબિત કરો કે **7**

   (i) જો H એ સમૂહ Gનો ઉપસમૂહ હોય અને $x \in G$ હોય, તો $x^{-1} Hx = \{x^{-1} hx \mid h \in H\}$ એ Gનો ઉપસમૂહ છે.

   (ii) સમૂહ Gનાં બે ઉપસમૂહોનો છેદગણ એ Gનો ઉપસમૂહ થાય.

4. (a) સાબિત કરો કે અવિભાજ્ય કક્ષા ધરાવતો સમૂહ એ ચક્રીય સમૂહ છે. **7**

(b) સમૂહનો ઉપસમૂહ વ્યાખ્યાયિત કરો તથા સાબિત કરો કે આપેલ સમૂહને તેના બે ઉચિત ઉપસમૂહોના યોગ તરીકે દર્શાવી શકાય નહીં. **7**

5. (a) જો H એ સમૂહ Gનો ઉપસમૂહ હોય, અને Gમાં H ના બે દક્ષિણ સહગણોનો ગુણાકાર પણ Gમાં H નો દક્ષિણ સહગણ ધરાવે તો H, G નો નિયત ઉપસમૂહ છે, તેમ સાબિત કરો. **7**

(b) જો k એ સમૂહ Gનો ઉપસમૂહ હોય, અને H એ સમૂહ Gનો નિયત ઉપસમૂહ છે. તો સાબિત કરો કે **7**

(i) $k \cap H$ એ Kનો નિયત ઉપસમૂહ થાય.

(ii) kH એ Gનો ઉપસમૂહ થાય.

6. (a) યુગ્મ ક્રમચયની વ્યાખ્યા આપો અને સાબિત કરો કે યુગ્મ ક્રમચયોનો ગણ A_n એ સંમિત સમૂહ S_n નો ઉપસમૂહ છે. **7**

(b) સંમિત સમૂહ S_6 નાં ઘટકો f, g જ્યાં **7**

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

માટે fg^2 અને o(g) મેળવો.

7. (a) સાબિત કરો કે સમાન કક્ષા ધરાવતા કોઈપણ બે સાન્ત ચક્રીય સમૂહો એકરૂપ થાય. **7**

(b) જો $G = < a >$ એ n કક્ષા ધરાવતો સાન્ત ચક્રીય સમૂહ હોય, તો સાબિત કરો કે $1 \le s < n$ માટે ઘટક $a^s \in G$ એ Gનો સર્જક હોય, તો અને તો જ $(n, s) = 1$. **7**

8. (a) સમરૂપતાનું મૂળભૂત પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(b) સમૂહનાં નિયત ઉપસમૂહની વ્યાખ્યા આપો. અને જો $\phi : (G; 0) \rightarrow (G'; \star)$ સમરૂપતા હોય, તો સાબિત કરો કે Gનાં નિયત ઉપસમૂહ H માટે $\phi(H)$, સમૂહ $\phi(G)$નો નિયત ઉપસમૂહ છે. **7**

9. ટૂંકમાં ઉત્તર આપો : (કોઈપણ **ચાર**) **8**

(1) જો સમૂહ Gની કક્ષા 5 હોય, તો Gનાં ઘટક aની કક્ષા શોધો. જ્યાં $a \neq e$ તથા કારણ આપો.

(2) સમક્રમી સમૂહ Gનાં ઘટકો a અને b ની કક્ષાઓ અનુક્રમે 2 અને 7 હોય, તો ઘટક abની કક્ષા મેળવો. કારણ આપો.

(3) નીચે આપેલ ક્રમચયો યુગ્મ છે કે અયુગ્મ તે ચકાસો :

(i) $f = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5)\ (6\ 7\ 8) \in S_8$.

(ii) $g = (1\ 7\ 3\ \ 13)\ (2\ \ 10\ \ 9)\ (6\ \ 12)\ (8\ \ 15) \in S_{15}$.

(4) આત્મરૂપતા વ્યાખ્યાયિત કરો અને કેઈલેનું પ્રમેય લખો.

(5) સમૂહ $\mathbb{Z}_5$ માં સમીકરણ $[2] +_5 x = [3]$ ઉકેલો.

(6) સમૂહનાં સર્જકની વ્યાખ્યા આપો અને સમૂહ $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ નાં બધા સર્જકો આપો.

Seat No. : ______________

AP-110

April-2022

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics
(Abstract Algebra-I)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

Instructions : (1) Attempt any **three** questions from question **1** to **8**.
(2) Question-**9** is compulsory.
(3) Write the question number in your answer book as shown in the question paper.
(4) The figure to the right indicates marks of the question.

1. (a) Let ~ be an equivalence relation in set A and suppose cl (a) is the equivalence class for $a \in A$. Then for $a, b \in A$, prove that

(i) $a \sim b \Leftrightarrow cl(a) = cl(b)$

(ii) $cl(a) \neq cl(b) \Rightarrow cl(a) \cap cl(b) = \phi$ **7**

(b) Define order of an element in a group. Let G is a commutative group and the elements a and b in G are of orders m and n respectively. If (m, n) = 1, then prove that order of ab is mn. **7**

2. (a) Let $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \text{ and } a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$. Show that G is a commutative group under matrix multiplication. **7**

(b) For fixed $n \in \mathbb{N}$ and $a, b \in \mathbb{Z}$, Define relation S in $\mathbb{Z}$ as aSb if n divides (a – b). Prove that S is an equivalence relation. **7**

3. (a) State and prove Lagrange's theorem for a subgroup H of a finite Group G. **7**

(b) Prove that **7**

(i) $x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx \mid h \in H\}$ is a subgroup of a group G, if $x \in G$ and H is a subgroup of G.

(ii) Intersection of any two subgroups of a group G is also a subgroup of G.

4. (a) Prove that a group of prime order is cyclic. **7**

(b) Define subgroup of a group and prove that a group cannot be a union of its two proper subgroups. **7**

5. (a) If H is a subgroup of G and if product of two right cosets of H in G is again a right coset of H in G, then prove that H is a normal subgroup of G. **7**

(b) If K is a subgroup of G and H is normal subgroup of G, then prove that **7**

(i) $K \cap H$ is a normal subgroup of K

(ii) KH is a subgroup of G.

6. (a) Define even permutation and prove that set of all even permutations A_n is a subgroup of a symmetric group S_n. **7**

(b) For the elements f, g of S_6, where **7**

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Obtain fg^2 and o(g).

7. (a) Prove that any two finite cyclic groups of same order are isomorphic. **7**

(b) Let $G = \langle a \rangle$ be a finite cyclic group of order n. Prove that for $1 \le s < n$, the element $a^s \in G$ is a generator of G if any only if $(n, s) = 1$. **7**

8. (a) State and prove first fundamental theorem of a group homomorphism. **7**

(b) Define Normal subgroup of a group and if H is a normal subgroup of a group G and $\phi : (G; 0) \to (G'; \star)$ is a group homomorphism, then prove that $\phi(H)$ is a normal subgroup of $\phi(G)$. **7**

9. Give the answer in brief : (any **four**) **8**

(1) If G is a group of order 5, then write 0(a), where $e \neq a \in G$ and justify.

(2) In a commutative group G, the elements a and b are of orders 2 and 7 respectively, then what is the order of ab ? Justify

(3) Examine whether the following permutations are even or odd :

(i) $f = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5)\ (6\ 7\ 8) \in S_8$.

(ii) $g = (1\ 7\ 3\ \ 13)\ (2\ \ 10\ \ 9)\ (6\ \ 12)\ (8\ \ 15) \in S_{15}$.

(4) Define automorphism and state the Cayley's theorem.

(5) Solve the equation $[2] +_5 x = [3]$ in $\mathbb{Z}_5$.

(6) Define generator of a group and give all generators of a group $(\mathbb{Z}_8, +_8)$.