Seat No. : ____________

JE-109

January-2024

B.Sc., Sem.-I

DSC-C-MAT-111T : Mathematics

(Calculus-I)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

સૂચનાઓ : (1) કુલ **પાંચ** પ્રશ્નો છે.
(2) ચિહ્નો અને પરિભાષા પ્રમાણભૂત છે.
(3) **બધા** પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.

1. (A) લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **6**

1. (B) જો $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, $x \in [-1, 1]$, હોય તો સાબિત કરો કે
$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x\, y_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0.$ **4**

અથવા

1. (A) જો $y = \cos(ax + b)$, $a \neq 0$, b વાસ્તવિક અચળાંકો છે, સાબિત કરો કે
$y_n = a^n \cos\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right), n \in N$ **6**

1. (B) $\sin x$ નું $x - \frac{\pi}{2}$ ની ચડતી ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો. **4**

2. (A) બર્નુલીનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેને ઉકેલવાની રીત સમજાવો. **6**

2. (B) ઉકેલ મેળવો : $(\sin x + y)\, dx + (x - 2\cos y)\, dy = 0$ **4**

અથવા

2. (A) લાગ્રાંજનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેને ઉકેલવાની રીત સમજાવો. **6**

2. (B) ઉકેલ મેળવો : $p^2 - 5p + 6 = 0$, જ્યાં $p = \frac{dy}{dx}$. **4**

3. (A) લાગ્રાંજનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **6**

3. (B) લક્ષ મેળવો : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - x}{x - 1 - \log x}, x \neq 1.$ **4**

અથવા

3. (A) કોશીનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **6**

3. (B) લક્ષ મેળવો : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}, x > 0.$ **4**

4. (A) ધારો કે વિધેય $\phi : R \to R$ માટે $\phi(x) \to b$ જ્યારે $x \to a$ છે અને
$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = l, l \in R$ નું અસ્તિત્વ છે. સાબિત કરો કે
$\lim_{x \to a} f(x, \phi(x))$ નું અસ્તિત્વ છે અને તેનું મૂલ્ય l છે. 6

4. (B) વ્યાખ્યાની મદદથી લક્ષ મેળવો : $\lim_{(x, y) \to (2, 3)} (3xy)$. 4

અથવા

4. (A) આંશિક વિકલનની વ્યાખ્યા આપો. ધારો કે $f : R^2 \to R$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$f_{xy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$ ની કિંમત મેળવો. 6

4. (B) ધારો કે $f(x, y, z) = (xy^2z, -x^3y^3, x^2yz^3)$. div f, curl f મેળવો. 4

5. કોઈપણ 10 પ્રશ્નનાં ઉત્તર આપો : 10

(1) જો $y = (2x + 3)^4$ તો $y_4(0)$ અને y_5 મેળવો.

(2) વિધેય $\log(1 + x); -1 < x \leq 1$ નું xની ચડતી ઘાતમાં વિસ્તરણ લખો.

(3) સાબિત કરો કે $f(x) = \tan x$ વધતું વિધેય છે.

(4) વિધેય $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ માટે રોલનું પ્રમેય લગાડી શકાય ?

(5) લક્ષ મેળવો : $\lim_{x \to 1} \frac{3^x - 2^x}{x}$.

(6) યથાર્થ વિકલ સમીકરણની વ્યાખ્યા આપો.

(7) જો $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ હોય તો $\frac{\partial f}{\partial x}$ અને $\frac{\partial f}{\partial y}$ મેળવો.

(8) grad f ની વ્યાખ્યા આપો.

(9) નીચે દર્શાવેલા વિકલ સમીકરણની કક્ષા અને પરિમાણ લખો :

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(10) નીચેના વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ લખો :

$$\sin^{-1}(y - xp) = (p^2 + 1)$$

(11) ક્લેરોટનું વિકલ સમીકરણ લખો.

(12) સુરેખ વિકલ સમીકરણ લખો.

Seat No. : ______

JE-109

January-2024

B.Sc., Sem.-I

DSC-C-MAT-111T : Mathematics

(Calculus-I)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

Instructions : (1) There are **five** questions.
(2) Notations and terminologies are standard.
(3) **All** questions carry equal marks.

1. (A) State and prove Leibnitz's theorem. **6**

1. (B) If $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, $x \in [-1, 1]$, then prove that
$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x\, y_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$. **4**

OR

1. (A) If $y = \cos(ax + b)$, $a \neq 0$, b are constant real numbers, then prove that
$y_n = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in N$ **6**

1. (B) Expand $\sin x$ in increasing powers of $x - \frac{\pi}{2}$. **4**

2. (A) Explain the method of solving the Bernoulli's differential equation. **6**

2. (B) Solve : $(\sin x + y)\, dx + (x - 2\cos y)\, dy = 0$ **4**

OR

2. (A) Write the Lagrange's differential equation and explain the method of solving it. **6**

2. (B) Solve : $p^2 - 5p + 6 = 0$, where $p = \frac{dy}{dx}$. **4**

3. (A) State and prove Lagrange's Mean Value theorem. **6**

3. (B) Evaluate : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - x}{x - 1 - \log x}$, $x \neq 1$. **4**

OR

3. (A) State and prove Cauchy's Mean Value theorem. **6**

3. (B) Evaluate : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$, $x > 0$. **4**

4. (A) Let $\phi : R \to R$ be any function such that $\phi(x) \to b$ when $x \to a$.

$\lim\limits_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = l$, $l \in R$, then prove that

$\lim\limits_{x\to a} f(x, \phi(x))$ exists and is equal to l. **6**

4. (B) Evaluate by definition : $\lim\limits_{(x, y)\to(2, 3)} (3xy)$. **4**

OR

4. (A) Define partial derivative. Let $f : R^2 \to R$ be defined as

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Find $f_{xy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$. **6**

4. (B) Let $f(x, y, z) = (xy^2z, -x^3y^3, x^2yz^3)$. Obtain div f, curl f. **4**

5. Attempt any **ten** : **10**

(1) If $y = (2x + 3)^4$, then find $y_4(0)$ and y_5.

(2) Write the expression for $\log(1 + x)$; $-1 < x \leq 1$ in increasing powers of x.

(3) Show that the function $f(x) = \tan x$ is increasing function.

(4) Can we apply Rolle's theorem for function $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$?

(5) Evaluate : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3^x - 2^x}{x}$.

(6) Give an example of exact differential equation.

(7) If $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, then find $\dfrac{\partial_f}{\partial_x}$ and $\dfrac{\partial_f}{\partial_y}$.

(8) Define : grad of f.

(9) Write the order and degree of the differential equation :

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

(10) Write a general solution of a differential equation :

$\sin^{-1}(y - xp) = (p^2 + 1)$

(11) State Clairaut's differential equation.

(12) State linear differential equation.